Come accennato nell'articolo precedente, procediamo alla costruzione esplicita delle traformazioni di Lorentz-Einstein partendo direttamente dai due postulati della Relatività ristretta che qui riformuliamo.

1 – *Tutte le leggi e principi fisici relativi alla relatività meccanica di Galileo-Newton e alla relatività elettromagnetica di Lorentz hanno la stessa forma in tutti i sistemi inerziali, cioè, in tutti i sistemi di riferimento che si muovono di moto rettilineo uniforme con velocità relativa u.*

2 – *La velocità della luce nel vuoto ha lo stesso valore in tutti i sistemi enerziali indipendentemente da movimento della sorgente e/o dell'osservatore.*

Rimandiamo all'articolo precedente anche per ulteriori precisazioni sulle convenzioni iniziali sui due riferimenti che si muovono di moto rettilineo uniforme con velocità relativa u e per semplicità assumiamo che i due assi x scorrino l'uno sull'altro. Per t=t'=0, si abbia x=x'=0; y=y'=0; z=z'=0. Poichè il moto è lungo l'asse x, due delle equazioni di trasformazione saranno y=y' e z=z'. *Rimane da trovare la relazione fra x, x', t , t'.*
Nel corso del tempo negli svariati scritti sulla Relatività ristretta si trovano centinaia di deduzioni delle nostre formule, visto anche che uno potrebbe partire da ipotizzare l'invarianza della forma dell'espressione matematica di qualsiasi legge fisica per arrivare ad esse. Noi seguiremo una delle tante deduzioni, seguendo la traccia riportata in R. B. Lindsay & H. Margenau, Dover Pubblications pag. 335 a seguire.

Consideriamo l'origine di S' vista da S

Nel sistema S la coordinata x ddell'origine di S' al tempo t è data da x=u*t, per cui la sua equazione oraria è
x-ut=0. La coordinata t è leggibile su un orologio fissato in S e localizzato in x e sincronizzato con l'orologio all'origine di S e con tutti gli altri orologi di S. Nel sistema di S' il moto della sua origine è semplicemente *x'=0.*
Le due equazioni descrivono la stessa cosa: per cui, assumendo una relazione lineare otteniamo :

$$x' = q\,(x - ut) \quad \textbf{(1)}$$

dove q è un parametro probabilmente dipendente da u.

Consideriamo ora l'origine di S vista da S'

Se applichiamo la stessa argomentazione al moto dell'origine di S visto dall'osservatore in S' avremo x' = -u*t' , ossia x'+ ut'=0 e da S il moto della sua origine è x=0, per cui :

$$x = q'(x' + ut') \quad \textbf{(2)}$$

Se le leggi sono le stesse per S e S' (postulato N. 1) q e q' saranno uguali e li chiamerò k e k=1 nella relatività di Galileo-Newton.

Per ottenere la relazione fra t e t', sostituisco x' della (1) nella (2), ottenendo la (3)

$$x=k[k(x - ut) + ut']= k^2(x-ut) + kut' \text{ da cui}$$
$$x = k^2x - k^2ut + kut'$$
$$x - k^2x = ku\,(t' - kt)$$
$$t' - kt = [(1 - k^2)x] / ku$$
$$\mathbf{t' = kt + [(1 - k^2)/ ku]\, x \quad (3)}$$

Cerchiamo ora la costante k, utilizzando il postulato N.2

Nella (1) e nella (4) differenziamo le variabili:

$$dx' = k(dx - udt)$$

(4)

$$dt' = kdt + [(1- k^2)/uk]dx$$

raccogliamo nel secondo membro k

$$dt' = k\{dt + [(1- k^2)/uk^2]dx\}$$

Se dx'/dt' è l'espressione della velocità istantanea in S', e dx/dt quella in S', rielaborando le (4) facendo apparire le velocità istantane e chiamando **$[(1- k^2)/uk^2] = w$,** dividendo le (4) membro a membro, abbiamo:

$dx'/dt' = [k(dx - udt)] / k\{dt + wdx\}$ semplificando k al secondo membro:

$dx'/dt' = [(dx - udt)] / \{dt + wdx\}$ raccogliendo nel secon membro al numeratore e al denominatore dt:

$dx'/dt' = dt(dx/dt - u) / dt(1 + wdx/dt)$ e semplicicando dt

$$\boldsymbol{dx'/dt' = (dx/dt - u) / (1 + w\, dx/dt)} \quad \textbf{(5)}$$

La (5) vale in generale. Possiamo infatti sostituire v e v' alle velocità istantanee di una particella riferite ai due sistemi S e S', mentre u è la velocità relativa dei due sistemi. Si abbia in particolare un fotone di luce che si muove lungo l'asse x. Sia in S sia in S' la velocità della particella di luce è sempre c (secondo postulato), che viene a sostituire nelle (5) le due velocità istantanee.

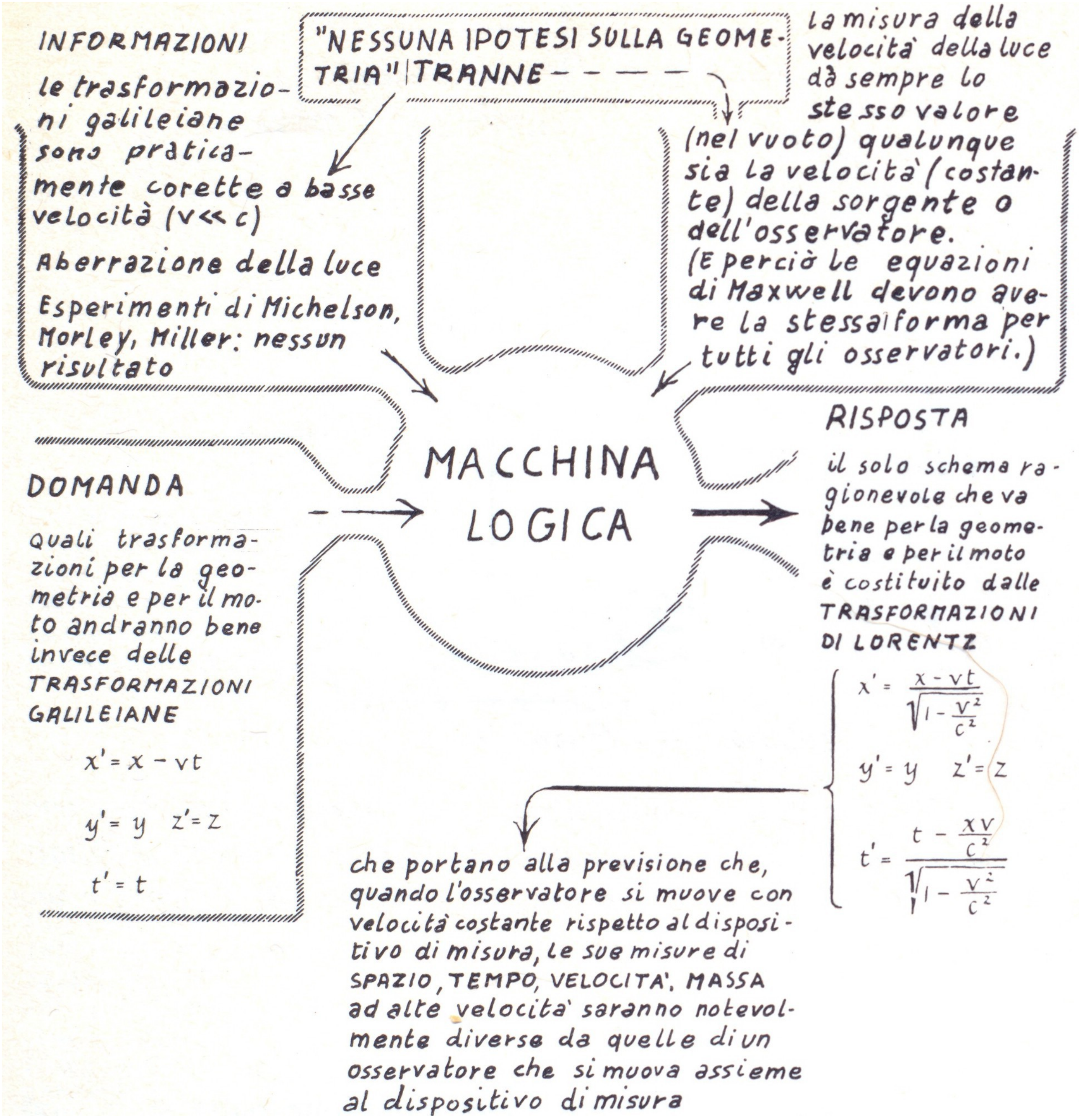
$c= (c- u) / (1 + w c)$ e tenendo conto del valore di w si ricava facilmente il fattore:

$$\mathbf{k = 1/ (1-v^2/c^2)^{1/2}} \quad \textbf{(6)} \qquad \text{infatti:}$$

$$c = (c-u) / [1 + (c-ck^2)/uk^2]$$
$$c = [(c-u)\, uk^2] / (uk^2 + c -ck^2)$$
$$c = (cuk^2 - u^2k^2) / (uk^2+c-ck^2)$$
$$cuk^2+c^2-c^2k^2 = cuk^2 - u^2k^2 \qquad \text{eliminando } cuk^2$$
$$c^2- c^2k^2 = -u^2k^2 \quad \text{isolando i monomi con } k^2$$
$$c2k^2 - u^2k^2 =c^2$$
$$k^2 = c^2 / (c^2-u^2)k^2 = c^2 / [c^2(1-u^2/c^2)] \quad \text{semplificando } c^2:$$

$$\mathbf{k = (1-u^2/c^2)^{-1/2}}$$

Sostituendo infine nelle equazioni (1) e (3) la (6) otteniamo le equazioni di Lorentz-Einstein nel nostro esempio semplificato (vedere sotto il riquadro).



L'immagine nel riquadro, in origine scritta in inglese in E. M. Rogers "Physics for the inquiring mind", Princeton University Press,1973, pag. 482, fu poi trasferita e tradotta in italiano in The Project Physics Course "Unità 4 e Unità 5", Zanichelli Editore, 1982 (Letture 5/125) e, in ultimo da noi presa in prestito.

Per scrivere le trasformazioni reciproche basta sostituire a x' e t', x e t, ai primi membri; sostituire poi ai secondi membri a x', t', x e t e cambiare di segno la u.

$$x = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} * (x'+ut') \qquad y=y' \qquad z=z1 \qquad t = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} * (t'+\frac{u}{c^2}x') \qquad \textbf{(7)}$$

La prima eq. di Lorenz, a destra nel riquadro, dal punto di vista di un singolo osservatore che pensa di essere in quiete nel sistema S, significa che, se esso sta osservando un evento in un punto di coordinate x, e t come indicato dalla sua stecca metrica e dal suo orologio (fermi rispetto a lui), la coordinata corrispondente x' che egli assegna allo stesso evento (per es., collisione in x,t di due particelle, ovvero una particella che raggiunge questa posizione...), nel sistema che vede in movimento, è data da:

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}} * (x - ut)$$

Similmente il tempo (la seconda eq. Di Lorentz) che egli dovrebbe assegnare a questo stesso evento letto però da un orologio fisso all'origine del secondo sistema in moto (S') e dato da:

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} * \left(t - \frac{ux'}{c^2}\right)$$

mentre y'=y e z'=z **(8)**

MISURE DI LUNGHEZZA NEI DUE SISTEMI

Immaginiamo che il fisico voglia misurare la lunghezza di una sbarra AB in quiete in S lungo l'asse x. Allora xb – xa =l è la lunghezza della sbarra misurata in S. *Non fa differenza a quali istanti i due estremi della sbarra sono stati annotati.*

Dalle equazioni (7) si ha:

$$xb - xa = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \left[(xb' - xa') + u(tb' - ta') \right]$$

o se noi indichiamo xb' – xa' = l', la lunghezza in S', si ha:

$$l' = l * \sqrt{1 - \beta^2} - u * (tb' - ta')$$

da cui si nota che l', la lunghezza in S', non è definita in quanto dipende anche da ta'-tb', dove ta' è l'istante in S' che corrisponde alla misura di xa' e così per tb'. Come accennato sembra naturale assumere che sia tb'=ta' per la misura della lunghezza della sbarra in S' che si muove con velocità costante -u. Fitzgerald aveva parlato di un'analoga contrazione per spiegare il risultato nullo dell'esperimento di Michelson-Morley. Colcludiamo che

$$\mathbf{l' = l * (1 - u^2 / c^2)^{1/2}}$$

COMPORTAMENTI DEGLI OROLOGI IN DIFFERENTI SISTEMI INERZIALI

Inversione del tempo e di relazioni di causa effetto

Consideriamo un orologio or' fisso all'origine di S' per cui x' = 0 sempre e x=ut. Consideriamo inoltre un'intera struttura di orologi fissati in S a x1, x2, x3..., adeguamente sincronizzati per t=0 fra loro e con quelli dell'altro sistema. Quando l'orologio or' passa davanti all'orologio in x1 si può leggere t1 e su Or', t1'. Similmente al passare di Or' davanti all'orologio x2 sono disponibili le letture degli istanti t2 e t2' rispettivamente. Ammettiamo che in x1 e x2 (sistema fisso) si verifichino due eventi, e1 e e2, negli istanti (distanze dall'origine fissa) t1 e t2 e che e1 preceda e2 e il punto di ascissa x1 preceda x2. Se t1' e t2' sono i corrispondenti tempi misurati dall'osservatore in moto come 'visti' dal fisso, dalle trasformazioni di Lorentz-Einstein si può scrivere:

$$t2' - t1' = \frac{[(t2 - t1) - u/c^2 * (x2 - x1)]}{\sqrt{1 - u^2} / c^2}$$

Se per ipotesi (t2 – t1) e u/c^2 * (x2 – x1) sono positivi, se vogliamo ottenere che t2' preceda t1' invece di seguirlo (t2' – t1'<0) basta che il numeratore della precedente equazione sia negativo cioè (t2 – t1) < u/c^2 * (x2 – x1); se lospostamento dal punto x1 a quello x2 era avvenuto con velocità V per es.diverso da u, (x2 – x1)=V (t2 – t1), che sostituita nella precedente si ha:

$t2' - t1' = \dfrac{[(t2 - t1) - uV/c^2 * (t2 - t1)]}{\sqrt{1 - u^2} / c^2}$ si mette in evidenza: $t2' - t1' = \dfrac{[(t2 - t1) * (1 - uV/c^2)]}{\sqrt{1 - u^2} / c^2}$ da cui

dovrebbe essere $1 - vV/c^2 < 0$ e $uV/c^2 > 1$; ma al massimo u*V potrebbe essere c^2 , da cui è impossibile invertire il tempo, scambiare l'effetto con la causa, morire prima di nascere … o, come ebbe ad affermare, Einstein telefonare nel passato!

DA CONTINUARE